TD 6

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ admet trois racines distinctes, alors sa dérivée s'annule au moins deux fois.
2. La somme de deux DL d'ordre 2 est un DL d'ordre 2.
3. Le produit de deux DL d'ordre 2 est un DL d'ordre 4.
4. Si une fonction continue admet un DL d'ordre 1 au point x_0, alors elle est dérivable en x_0.
5. Si une fonction dérivable en x_0 admet un DL d'ordre 2 au point x_0, alors on peut en déduire la position de son graphe par rapport à sa tangente en x_0
6. Une fonction est forcément soit concave, soit convexe.
7. Si f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$, alors f admet un minimum local strict en 0.
8. Si f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ admet un minimum local strict en 0, alors on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

2 Taylor à l'ordre 3

À l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

1. la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
2. la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+x)$.

3 Taylor à l'ordre 2

À l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité d'ordre 2 de :

1. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$, au voisinage de $x_0 = 0$.
2. La fonction g définie par $g(x) = \ln(2+2x+x^2)$, au voisinage de $x_0 = 2$.

4 Concavité, convexité

Les fonctions suivantes sont-elles concaves sur leur domaine de définition ? Convexes ? Ni l'un ni l'autre ?

1. $f(x) = 7x^4 + 8x^2$
2. $g(x) = 7x^4 - 8x^2$
3. $h(x) = 2\ln(x) - 4x^3$pour $x > 0$

5 Études de fonctions et extréma

Étudier les fonctions suivantes. Tracer leurs graphes. Déterminer les extréma.

1. $f(x) = 3x^2e^{-x}$
2. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
3. $h(x) = 2\ln(1+x^2)$

6 Tableaux de variations et graphes

1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+7}{(x-3)^2}$. Faire son tableau de variations complet et tracer son graphe.
2. Même question pour la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$$

7 Maximisation de l'utilité

Un agent économique cherche à maximiser son utilité. Celle-ci est donnée par $U(x) = \ln(x) - e^{x-1}$, où x désigne son niveau de consommation d'un certain bien.

1. Montrer que U est strictement concave.
2. Calculer $U'(1)$.
3. En déduire le maximum global de U sur $]0; +\infty[$.

8. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \operatorname{Log} \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

$$y = \operatorname{Log}(x^2+x).$$

$$y = \operatorname{Log}(x^3-2x+5).$$

ÉVALUATION

Vous trouverez les corrigés détaillés de tous les exercices sur la page du livre sur le site www.dunod.com

Quiz

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ admet trois racines distinctes, alors sa dérivée s'annule au moins deux fois.
2. La somme de deux DL d'ordre 2 est un DL d'ordre 2.
3. Le produit de deux DL d'ordre 2 est un DL d'ordre 4.
4. Si une fonction continue admet un DL d'ordre 1 au point x_0, alors elle est dérivable en x_0.
5. Si une fonction dérivable en x_0 admet un DL d'ordre 2 au point x_0, alors on peut en déduire la position de son graphe par rapport à sa tangente en x_0.
6. Une fonction est forcément soit concave, soit convexe.
7. Si f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$, alors f admet un minimum local strict en 0.
8. Si f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ admet un minimum local strict en 0, alors on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

► Corrigés p. 367

Exercices

2 Taylor à l'ordre 3

À l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

1. la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
2. la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+x)$.

► Corrigés p. 367

3 Taylor à l'ordre 2

À l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité d'ordre 2 de :

1. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$, au voisinage de $x_0 = 0$.
2. La fonction g définie par $g(x) = \ln(2+2x+x^2)$, au voisinage de $x_0 = 2$.

4 Concavité, convexité

Les fonctions suivantes sont-elles concaves sur leur domaine de définition ? Convexes ? Ni l'un ni l'autre ?

1. $f(x) = 7x^4 + 8x^2$
2. $g(x) = 7x^4 - 8x^2$
3. $h(x) = 2\ln(x) - 4x^3$ pour $x > 0$

► Corrigés p. 367

5 Études de fonctions et extréma

Étudier les fonctions suivantes. Tracer leurs graphes. Déterminer les extréma.

1. $f(x) = 3x^2e^{-x}$
2. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
3. $h(x) = 2\ln(1+x^2)$

6 Tableaux de variations et graphes

1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+7}{(x-3)^2}$. Faire son tableau de variations complet et tracer son graphe.
2. Même question pour la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$$

7 Maximisation de l'utilité

Un agent économique cherche à maximiser son utilité. Celle-ci est donnée par $U(x) = \ln(x) - e^{x-1}$, où x désigne son niveau de consommation d'un certain bien.

1. Montrer que U est strictement concave.
2. Calculer $U'(1)$.
3. En déduire le maximum global de U sur $]0; +\infty[$.