

TD 5

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Les graphes des fonctions \ln et \exp sont symétriques.
2. La fonction \exp tend vers $+\infty$ plus vite que la fonction \ln , quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Si \log_{10} désigne la fonction logarithme décimal (c.-à-d. \log de base 10), alors $\log_{10}(10\,000) = 4$.
4. La fonction \exp est la seule fonction définie sur \mathbb{R} qui soit égale à sa propre dérivée.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(\ln(x)) = x$.

2 Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x + 3) \ln(x + 7)$
2. $g(x) = 7 + \ln(x^2 + 3)$
3. $h(x) = -8x + \ln(x - x^2)$

3 Résolutions d'équations

Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x + 4) = 2 \ln(x)$
2. $\ln(x + 8) = 4$
3. $2(\ln x)^2 + 3 \ln x - 2 = 0$
4. $2e^{3x} = 17$
5. $3^x = 12$

4 Études des variations

Étudier les variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x - 2 \ln(1 + x)$
2. $g(x) = e^{2x} - 5x$

5 Croissance du PIB

On suppose que le PIB d'un pays évolue avec le temps de la façon suivante :

$$Y(t) = 10 \times 1,05^t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

où $Y(t)$ est exprimé en milliards de dollars, et t est exprimé en années.

1. Quel est le PIB en $t = 0$? Quelle est sa valeur six mois plus tard ? Deux ans plus tard ?
2. Quel est le taux de croissance du PIB ?
3. Combien de temps faut-il pour que le PIB soit multiplié par deux ?
4. Mêmes questions pour un second pays dont le PIB est donné par $Z(t) = 20 \times 1,02^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
5. À quel moment le premier pays va-t-il dépasser le second ?

6 Aversion au risque

En microéconomie, la fonction d'utilité d'un agent économique est une fonction croissante concave U . Si U est deux fois dérivable, on mesure l'aversion absolue pour le risque de l'agent par $A_U(x) = \frac{-U''(x)}{U'(x)}$ et l'aversion relative pour le risque par $R_U(x) = -x \frac{U''(x)}{U'(x)}$, où x désigne le niveau de richesse de l'agent (► J. Etner, M. Jeleva, *Microéconomie*, pages 172-173).

Calculer l'aversion absolue pour le risque et l'aversion relative pour le risque avec les fonctions d'utilités suivantes, et représenter graphiquement ces fonctions d'utilités :

1. $U(x) = ax + b$ pour tout $x \geq 0$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
2. $U(x) = \ln(x)$ pour tout $x > 0$.
3. $U(x) = \frac{1}{1-r} x^{1-r}$ pour tout $x > 0$, où $r > 0$, $r \neq 1$.
4. $U(x) = -e^{-ax}$ pour tout $x \geq 0$, où $a > 0$.

7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = (2x^2 - 3)^2.$$

$$y = (x^2 + a^2)^5.$$

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$y = (a + x) \sqrt{a - x}.$$

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x \sqrt{1 + x^2}}.$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

$$y = (1 + \sqrt[3]{x})^3.$$

$$y = \sin^2 x.$$

$$y = 2 \sin x + \cos 3x.$$

$$y = \operatorname{tg}(ax + b).$$

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

$$y = \sin 2x \cdot \cos 3x.$$