

TD 4

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

- Quand une fonction a une limite à gauche et une limite à droite en un point, alors elle a une limite en ce point.
- Si f est dérivable alors elle est continue.
- Si f est continue alors elle est dérivable.
- Soit f continue sur $[1; 3]$ telle que $f(1) = -1$ et $f(3) = 2$. Alors il existe un unique $x \in [1; 3]$ tel que $f(x) = 0$.
- Tout polynôme de degré pair admet au moins une racine.

2 Limite en un point x_0

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 7x$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2}{(x - 2)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

3 Limite en $+\infty$

Calculer la limite pour x tendant vers $+\infty$ de

- $f(x) = \frac{2x+3}{3x^2-4}$
- $f(x) = \frac{2x^2+3}{3x^2-4}$
- $f(x) = \frac{2x^3+3}{3x^2-4}$

4 Règle de l'Hospital

En utilisant la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x\sqrt{2x} - 2x}$

5 Continuité de la fonction d'offre

- La fonction d'offre d'une firme donne la quantité $Q(P)$ produite par la firme en fonction du prix. Elle est telle que :

$$Q(P) = 0 \text{ si } P < 5$$

$$Q(P) = 100P - 300 \text{ si } P \geq 5$$

Cette fonction est-elle continue à gauche ? Continue à droite ? Continue ?

Toutes les valeurs de l'offre sont-elles possibles ? Représenter graphiquement cette fonction.

- Même question si l'offre est donnée par :

$$Q(P) = 0 \text{ si } P < 5$$

$$Q(P) = 100P - 500 \text{ si } P \geq 5$$

6 Prolongement par continuité

On considère la fonction H définie pour tout $x \neq 0$ par

$$H(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

Étudier la limite de $H(x)$ pour $x \rightarrow 0$.

Peut-on prolonger H par continuité en $x = 0$?

7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = x^4 + 3x^2 - 6.$$

$$y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x.$$

$$y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}.$$

$$y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c.$$

$$y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x.$$

$$y = \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}.$$

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}.$$

$$y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}.$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5. \text{ Ré}$$