

TD 2

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Une fonction f définie sur \mathbb{R} a un taux d'accroissement constant si et seulement si elle est affine.
2. Si une fonction f est dérivable en x_0 , alors son graphe admet une tangente en x_0 .
3. La dérivée d'une fonction composée est la composée des dérivées.
4. Toute fonction polynôme est dérivable sur tout \mathbb{R} .
5. Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

2 Dérivée du coût de production

On note $C(Q)$ le coût total de production de Q unités d'un bien. On suppose que C est dérivable.

1. Supposons que $C'(500) = 20$. Qu'est-ce que cela signifie concrètement ?
2. Supposons que l'on vende ce bien au prix unitaire $P = 25$, et que la production actuelle est de 500. Est-il intéressant d'augmenter un peu la production ?
3. Même question pour un prix $P = 15$.

3 Dérivée limite du taux d'accroissement

En utilisant la définition de la dérivée en un point, déterminer la dérivée de f en $x_0 = 1$, si $f(x) = \frac{2}{x+1}$ pour

tout $x \geq 0$. Tracer sur un même graphique le graphe de f et sa tangente en x_0 .

4 Limite en un point

Calculer la limite en $x_0 = 1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
3. $f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x^2 - 3x + 2}$
4. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

5 Dérivée et tangente

1. Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{4}x^3$.

Calculer la dérivée de f en $x_0 = 2$. Tracer sur un même graphique la courbe représentant f et sa tangente en $x_0 = 2$.

2. Mêmes questions pour $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ avec $x_0 = 4$.

6 Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$
2. $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3}$
5. $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$
6. $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x - 3}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2 + 2}}$

7 Profit sur un marché concurrentiel

1. Une firme est dans un marché concurrentiel pour la production d'un bien donné. Le prix du marché est $P = 100$. Le coût de production pour cette firme d'une quantité Q de bien est $C(Q) = 60Q + 2Q^2$.

Calculer la fonction de profit puis sa dérivée. Quelle est la quantité Q^* qui maximise le profit de la firme ?

2. Mêmes questions avec $P = 50$.

8 Profit d'un monopole

Une entreprise est en situation de monopole pour la production d'un bien. On suppose que la demande Q dépend du prix P de la façon suivante :

$$Q = 100 - \frac{1}{2}P$$

Supposons de plus que le coût de production d'une quantité Q est :

$$C(Q) = 60Q + 2Q^2$$

Calculer la fonction de profit en fonction uniquement de la quantité Q , puis sa dérivée. Quelle est la quantité Q^* qui maximise le profit de la firme ?

9 Variations d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout x par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$$

Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 10]$.

Calculer sa dérivée et faire son tableau de variations sur cet intervalle.