

TD 1

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Tout nombre réel est rationnel.
2. Tout nombre rationnel est réel.
3. Une partie majorée non vide de \mathbb{R} admet toujours un plus grand élément.
4. Une partie majorée non vide de \mathbb{R} admet toujours une borne supérieure.
5. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
6. La seule fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle (c'est-à-dire telle que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

2 Mélanges d'intersections et d'unions

Montrer que si A, B, C sont des ensembles, alors :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

et

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

3 Max, min, sup, inf

Dans l'ensemble \mathbb{R} , donner le plus grand élément, le plus petit élément, la borne sup, la borne inf des parties suivantes.

1. $A = [1; 3[$
2. $B =] - 4; +\infty[$
3. $C = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

4 Domaine de définition

Quel est le domaine de définition D_f des fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \frac{2}{x}$
2. $f(x) = 4 + \frac{7}{x-2}$
3. $f(x) = 2 + \frac{8}{x^2+2}$
4. $f(x) = 17 + 3x + \frac{9}{x^2-16}$
5. $f(x) = 5 - \frac{2}{x^2-5x+6}$

5 Fonctions paires, fonctions impaires

Dites si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni l'un ni l'autre :

1. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 7$
2. $g(x) = x^3 - 7x$
3. $h(x) = x^5 + 2x^2 + 1$
4. $F(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 + 7}$

6 Une récurrence

Montrer par récurrence que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

7 Coût quadratique et fonction de profit

Une entreprise fabrique des objets qu'elle vend au prix unitaire de 100 euros. Les coûts de fabrication d'une quantité q d'objets sont donnés par :

$$C(q) = 0,1q^2 + 50q + 4000$$

1. Calculer le profit $\Pi(q)$ de l'entreprise si elle fabrique q objets et qu'elle réussit à les vendre tous au prix unitaire de 100 euros.
2. Pour quelles valeurs de q le profit est-il nul ?
3. Pour quelles valeurs de q le profit est-il positif ?

8 Factoriser pour résoudre

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

1. Calculer $f(1)$. En déduire une factorisation de f .
2. Résoudre $f(x) = 0$.

9 Binôme de Newton

Calculer $(x+2)^5$ de deux façons différentes :

1. Par calcul direct.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton.

10 Fonction rationnelle et coût moyen

Une imprimerie produit des ouvrages au coût unitaire de 5 euros pour les 2000 premiers exemplaires, et de 8 euros pour les exemplaires au-delà de 2000 (car elle doit alors utiliser une machine plus coûteuse).

Quelle est la fonction de coût total ?

Quelle est la fonction de coût moyen ?