Feuille 5 : Applications linéaires

Exercice 1
Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :
1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (0, 2y)$.
2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x + 3, y)$.
3. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ donnée par $f(x) = 1/x$.
4. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (y^2, x - y)$.
5. La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

Exercice 2
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires.
Montrer que $x \mapsto f(x) + g(x)$ est linéaire et que $x \mapsto f(x)g(x)$ n'est pas linéaire.

Exercice 3. La Trace matricielle
Pour une matrice carré réelle $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit l'application trace par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
1. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $Tr(A)$, $Tr(B)$ et $Tr(A + B)$.
2. Montrer que l'application trace est linéaire.

Exercice 4.
Soit f l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = \alpha(x, y)$.
1. Montrer que c'est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Soit $(x', y') \in \mathbb{R}$, représenter graphiquement son antécédent par f. En déduire $\mathrm{Im} f$.

Exercice 5.
Soit R_θ la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$.
1. Vérifier graphiquement que $R_\theta(\lambda x) = \lambda R_\theta(x)$.
2. Vérifier graphiquement que $R_\theta(x + y) = R_\theta(x) + R_\theta(y)$.
3. Que peut-on en déduire sur R_θ ?

Exercice 6.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2(= f \circ f) = f$ (on dit que f est un projecteur).
1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im} f$.
3. En déduire que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.
4. Soit p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = (x, x)$.
(i) Montrer que c'est une projection.
(ii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette p
(iii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette $\mathrm{Id} - p$

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.
1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.

3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par f. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 9.
Soit Φ la fonction définie sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer son image.

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On considère la fonction définie dans l'espace des suites et donnée par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Quelle relation doit vérifier les coefficients u_{n+2}, u_{n+1} et u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour être dans le noyau de f ?
Rq. pour une base de noyau, cf l'exercice du TD Espaces vectoriels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 11.
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère l'application définie dans l'espace des fonctions de classe C^1, à valeur dans l'espace des fonctions continues et donnée par

$$f(y) = y' + y$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les fonctions y de classe C^1 telles que $y' + y = 0$.
3. En déduire une base du noyau de f.

Exercice 12.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.
1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.

b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. (On peut utiliser une autre méthode.)

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Im}(f)$ (i.e. pour $(x, y, z) \in \mathrm{Im} f$ avoir des relations entre x, y, z).
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 13.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3;\ u(e_3) = 3f_1 - f_3;\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. Déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et le rang de u.

Exercice 14.
Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$(= l'ensemble des polynômes de degré 2).
Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$.
1. Montrer que u est une application linéaire. De plus, montrer que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Déterminer $\dim(\ker(u))$ et le rang de u.
4. Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par u. En déduire une base de $\text{Im}(u)$.

Exercice 15.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soit f une application linéaire de E dans E.
1. Soit k un entier. Montrer que $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.
2. Comparer $\dim(\ker f^k)$ et $\dim(\ker f^{k+1})$.
3. Soit k un entier. Montrer que $\text{Im}\, f^{k+1} \subset \text{Im} f^k$.
4. Comparer $\dim(\text{Im}\, f^k)$ et $\dim(\text{Im}\, f^{k+1})$.
Question hors-TD. Déterminer la monotonie de la suite entière $(\dim(\ker f^k))_k$. En déduire qu'à partir d'un certain rang k_0 la suite est constante. (Idem pour $(\dim(\text{Im}\, f^k))_k$)

Exercice 16. - Question de cours
Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que [u est injective] $\Leftrightarrow$ [$\ker u = \{0_E\}$].

Exercice 17.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
1. Montrer que si $v_1, v_2, ..., v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1), f(v_2), ...f(v_p)$ engendrent $\text{Im}(f)$.
2. Montrer que si $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1, v_2, ..., v_p$ est libre aussi.
3. Montrer que si f est injective et si $v_1, ..., v_p$ est un système libre alors $f(v_1), ..., f(v_p)$ est libre aussi.

Exercice 18.
Soit $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$.
1. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice 19.
Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, avec f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
1. Montrer que [$\text{Im} f \subset \ker g$] $\Leftrightarrow$ [$g \circ f(x) = 0\ \forall x \in E$].

Exercice 20.
Soit $u : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension n pair. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(a) $u^2(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $n = 2\dim(\text{Im}(u))$. **(b)** $\text{Im}(u) = \ker(u)$.