Systèmes intégrables et espaces de Hardy
Cours de Patrick Gérard
Hammamet 10-13 Octobre 2022

Notes de Claude Zuily et Jiao He*

Références bibliographiques:

1. P. Gérard - S. Grellier : *The cubic Szegő equation*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 43 (2010), 761–810.

2. P. Gérard - S. Grellier : *An explicit formula for the cubic Szegő equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 2979–2995.

3. P. Gérard - T. Kappeler : *On the integrability of the Benjamin-Ono equation on the torus*, Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021), no. 8, 1685-1747.

4. P. Gérard - T. Kappeler - P. Topalov : *Sharp well-posedness results of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbf{T};\mathbf{R})$ and qualitative properties of its solutions*, to appear in Acta Math., arXiv:2004.04857.

5. P. Gérard - A. Pushnitski : *Unbounded Hankel operators and the flow of the cubic Szegő equation*, arXiv 2022.

1 Espaces de Hardy et opérateurs remarquables

On travaille sur le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

On munit $L^2(\mathbf{T})$ du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Si $f \in L^2(\mathbf{T})$ ses coefficients de Fourier sont définis pour $k \in \mathbf{Z}$ par,

$$\widehat{f}(k) = \langle f \mid e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx.$$

*Les erreurs éventuelles dans ce texte sont bien entendu de la seule responsabilité des rédacteurs.

On notera parfois $\widehat{f}(k) = c_k(f)$.

1.1 L'espace de Hardy

On pose,

$$L^2_+(\mathbf{T}) = \{f \in L^2(\mathbf{T}) : \widehat{f}(k) = 0 \text{ pour } k < 0\}.$$

Cet espace est aussi noté $H^2(\mathbf{T})$ en analyse harmonique. On a,

$$f \in L^2_+(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty.$$

Si $f \in L^2_+(\mathbf{T})$ elle possède un prolongement holomorphe, $\underline{f}$, au disque unité de $\mathbf{C}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ en posant,

$$\underline{f}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

et on a, $f(x) = \lim_{r \to 1^-} \underline{f}(re^{ix})$ dans $L^2(\mathbf{T})$.

1.2 Les opérateurs remarquables

1.2.1 Projecteur de Szegő

On le note Π. Il s'agit du projecteur orthogonal,

$$L^2(\mathbf{T}) \ni \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx} \in L^2_+(\mathbf{T}).$$

Bien sûr $\Pi^2 = \Pi$ et donc $\Pi(\mathrm{Id} - \Pi) = 0$.

Notons aussi que pour $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ on a,

$$\langle \Pi f \mid g \rangle = \langle f \mid \Pi g \rangle. \tag{1.1}$$

Par un théorème de Marcel Riesz, Π se prolonge en un opérateur continu de $L^p(\mathbf{T})$ dans $L^p_+(\mathbf{T})$ pour $1 < p < +\infty$ et ceci est faux pour $p = 1$ et $p = +\infty$.

Plus généralement si $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{T}) = \big(C^\infty(\mathbf{T})\big)'$ on peut définir ses coefficients de Fourier, $\widehat{u}(k) = \langle u, e^{-ikx} \rangle, k \in \mathbf{Z}$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne ici la dualité $\mathcal{D}'(\mathbf{T})/C^\infty(\mathbf{T})$) et pour tout sous ensemble $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ on pose,

$$E_+ = \{u \in E : \widehat{u}(k) = 0 \text{ pour } k < 0\}.$$

1.2.2 L'opérateur de décalage

C'est l'opérateur,

$$S : L^2_+(\mathbf{T}) \to L^2_+(\mathbf{T}), \quad f \mapsto Sf, \quad Sf(x) = e^{ix} f. \tag{1.2}$$

On a $c_k(Sf) = 0$ si $k < 1$.

1.2.3 L'opérateur dual

Si $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ alors $e^{-ix} f \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$. On pose,

$$S^* f = \Pi\big(e^{-ix} f\big) \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T}), \quad \text{ou bien,} \quad \widehat{S^* f}(k) = \widehat{f}(k+1). \tag{1.3}$$

Pour $f \in L^2_+(\mathbf{T}), g \in L^2_+(\mathbf{T})$ on a,

$$\langle Sf \mid g \rangle = \langle f \mid S^* g \rangle.$$

En effet, comme $f \in L^2_+(\mathbf{T})$, on a $\Pi f = f$. On peut écrire, utilisant (1.1),

$$\langle Sf \mid g \rangle = \langle e^{ix} f \mid g \rangle = \langle f \mid e^{-ix} g \rangle = \langle \Pi f \mid e^{-ix} g \rangle = \langle f \mid \Pi(e^{-ix} g) \rangle = \langle f \mid S^* g \rangle.$$

On a ensuite,

$$S^* S = \mathrm{Id}, \quad S S^* = \mathrm{Id} - \langle \cdot \mid \mathbf{1} \rangle \mathbf{1}, \tag{1.4}$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction $\mathbf{T} \ni x \mapsto 1$.

En effet, soit $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ alors $Sf = e^{ix} f \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ de sorte que, $S^*(Sf) = \Pi\big(e^{-ix} e^{ix} f\big) = \Pi(f) = f$. Ensuite soit $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$, alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \Rightarrow e^{-ix} f(x) = \sum_{\ell=-1}^{+\infty} c_{\ell+1}(f) e^{i\ell x} \Rightarrow S^*(f)(x) = \Pi(e^{-ix} f) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} c_{\ell+1}(f) e^{i\ell x},$$

de sorte que,

$$S\big(S^* f\big)(x) = e^{ix} S^* f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} c_{\ell+1}(f) e^{i(\ell+1)x} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = f - c_0(f),$$

et $c_0(f) = \langle f \mid \mathbf{1} \rangle \mathbf{1}$.

1.2.4 Opérateurs de Hankel

On définit,

$$\mathcal{P} = \big\{p \in \mathcal{D}'(\mathbf{T}) : \widehat{p}(k) = 0, \text{ sauf pour un nombre fini de } k \in \mathbf{N}\big\},$$
$$\mathcal{P}_+ = \big\{p(x) = \sum_{k=0}^{N} \widehat{p}(k) e^{ikx}\big\}.$$

Définition 1.1. *Un opérateur de Hankel est une application* **antilinéaire** $\Gamma : \mathcal{P}_+ \to \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *telle que,*

$$S^*\Gamma = \Gamma S.$$

Proposition 1.2.

$$\Gamma \textit{ Hankel } \iff \exists u \in \mathcal{D}'(\mathbf{T}) : \forall f \in \mathcal{P}_+, \quad \Gamma(f) = \Pi\big(u\overline{f}\,\big).$$

On note $H_u(f) = \Pi(u\,\overline{f})$.

La preuve utilisera le lemme suivant.

Lemme 1.3. *1. Pour* $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *on a,* $\quad \Pi\big(e^{-ix}(\mathrm{Id} - \Pi)v\big) = 0.$

2. Pour $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ *et* $k \in \mathbf{N}$ *on a,* $\big(S^*\big)^k f = \Pi\big(e^{-ikx} f\big)$.

Démonstration du Lemme. 1. Si $v = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$ on a $(\mathrm{Id} - \Pi)v = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx}$ de sorte que $e^{-ix}(\mathrm{Id} - \Pi)v = \sum_{\ell=-\infty}^{-2} c_{\ell+1} e^{i\ell x}$, ce qui prouve le point 1.

2. On le prouve par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$. La formule est, par définition, vraie pour $k = 1$. Supposons la vraie à l'ordre k alors, écrivant $\Pi = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - \Pi)$ il vient

$$(S^*)^{k+1} f = S^*\big((S^*)^k f\big) = \Pi\big(e^{-ix}\Pi\big(e^{-ikx} f\big)\big) = \Pi\big(e^{-i(k+1)x} f\big) - \Pi\big(e^{-ix}\big(\mathrm{Id} - \Pi\big)\big(e^{-ikx} f\big)\big),$$

et on applique le point 1. avec $v = e^{-ikx} f$. $\square$

Démonstration de la Proposition 1.2. Supposons que Γ vérifie $S^*\Gamma = \Gamma S$. Posons $u = \Gamma\mathbf{1}$. On montre, par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$, que $\Gamma(e^{ikx}) = \big(S^*\big)^k u$. En effet cette formule est vraie pour $k = 0$. Supposons la vraie à l'ordre $k \geq 0$. Alors,

$$\Gamma(e^{i(k+1)x}) = \Gamma(e^{ix} e^{i(k+1)x}) = \Gamma(S(e^{ikx})) = S^*\Gamma(e^{ikx}) = \big(S^*\big)^{k+1} u$$

Ensuite si $f \in \mathcal{P}_+$ on a, $f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{ikx}$ donc, utilisant l'antilinéarité de Γ, le point 2. du lemme et la linéarité de Π il vient,

$$\Gamma(f) = \sum_{k=0}^{N} \overline{c_k}\, \Gamma\big(e^{ikx}\big) = \sum_{k=0}^{N} \overline{c_k} \big(S^*\big)^k u = \sum_{k=0}^{N} \overline{c_k}\, \Pi\big(e^{-ikx} u\big) = \Pi\big(u\overline{f}\big).$$

Inversement supposons que $\Gamma(f) = \Pi(u\overline{f})$ alors,

$$\begin{aligned}\Gamma(Sf) &= \Pi\big(u\,\overline{Sf}\big) = \Pi\big(u\,e^{-ix}\overline{f}\big)\\ &= \Pi\big(e^{-ix}\Pi\big(u\overline{f}\big)\big) + \Pi\big(e^{-ix}(\mathrm{Id}-\Pi)\big(u\overline{f}\big)\big) = \Pi\big(e^{-ix}\Pi\big(u\overline{f}\big)\big) = S^*\Gamma(f),\end{aligned}$$

d'après le point 1. du lemme. □

Théorème 1.4. *(Nehari 1957) L'opérateur Γ se prolonge en un opérateur borné de $L^2_+(\mathbf{T})$ dans $L^2_+(\mathbf{T})$ si et seulement si il existe $b \in L^\infty(\mathbf{T})$ tel que $\Pi(b) = \Gamma(\mathbf{1})$.*

Rappelons que l'on a noté $\Gamma f = H_u(f)$. Alors on peut montrer les propriétés suivantes.

1. H_u compact $\Longleftrightarrow u = \Pi(c)$, $\quad c$ continu.
2. H_u Hilbert-Schmidt $\Longleftrightarrow u \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbf{T})$.
3. H_u à trace $\Longleftrightarrow u \in B^1_{1,1,+}$.
4. H_u de rang fini $\Longleftrightarrow \underline{u}(z)$ est une fraction rationnelle sans pôle dans $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$.

Théorème 1.5. *Si $u \in L^2_+(\mathbf{T})$, $H_u : \mathcal{P}_+ \to L^2_+(\mathbf{T})$ se prolonge de deux façons.*

1. Par fermeture, de domaine,

$Dom(H_u)_{min} = \{f \in L^2_+(\mathbf{T}) : \exists (f_j) \subset \mathcal{P}_+, f_j \to f,$ et $H_u(f_j) \to \alpha$ dans $L^2(\mathbf{T})\}$ et $H_u(f) = \lim_{j\to+\infty} H_u(f_j)$.

2. $Dom(H_u)_{max} = \{f \in L^2_+(\mathbf{T}) : \Pi(u\overline{f}) \in L^2_+(\mathbf{T})\}$.

Alors $Dom(H_u)_{min} = Dom(H_u)_{max}$.

H_u est alors un opérateur fermé non borné. Si $f, g \in \mathcal{P}_+$, $\langle H_u(f), g\rangle = \langle H_u(g), f\rangle$ et cette égalité est encore vraie si $f, g \in \mathrm{Dom}(H_u)$. D'autre part,

$$\mathrm{Dom}(H_u^2) = \{f \in \mathrm{Dom}(H_u) : H_u(f) \in \mathrm{Dom}(H_u)\},$$

et $\langle H_u^2(f), f\rangle = \|H_u(f)\|^2_{L^2(\mathbf{T})}$. L'opérateur H_u^2 est positif auto adjoint.

On a également,

$$S^*H_u = H_uS = H_{S^*u} = \text{opérateur de Hankel décalé.}$$

1.2.5 Opérateurs de Toeplitz.

Définition 1.6. *T linéaire continue de $C_+^\infty(\mathbf{T})$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ est un Toeplitz si,*

$$S^*TS = T.$$

Théorème 1.7. *T est un Toeplitz si et seulement si,*

$$\exists b \in \mathcal{D}'(\mathbf{T}) : T(f) = \Pi(bf) := T_b(f) \quad \forall f \in C_+^\infty(\mathbf{T}).$$

Démonstration. Tout d'abord si il existe $b \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ telle que $T(f) = \Pi(bf)$ on a,

$$S^*TSf = \Pi(e^{-ix}\Pi(be^{ix}f)) = \Pi(bf) - \Pi(e^{-ix}(\mathrm{Id} - \Pi)(be^{ix}f)) = \Pi(bf) = T(f)$$

pour tout $f \in C_+^\infty(\mathbf{T})$, car $e^{-ix}(\mathrm{Id} - \Pi)(be^{ix}f)$ a son spectre dans $k < 0$.

Montrons l'implication inverse. Elle est basée sur deux points.

Point 1. Supposons qu'il existe $b \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ telle que, $T(e^{ikx}) = \Pi(be^{ikx})$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Alors,

$$T(f) = \Pi(bf) \quad \forall f \in C_+^\infty(\mathbf{T}).$$

En effet, comme T est continue de $C_+^\infty(\mathbf{T})$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbf{T})$ le théorème des noyaux de Schwartz montre qu'il existe $K \in \mathcal{D}'(\mathbf{T} \times \mathbf{T})$ telle que,

$$\langle T(f), \varphi \rangle = \langle K, f \otimes \varphi \rangle, \quad \forall f, \varphi \in C_+^\infty(\mathbf{T}).$$

Les élements de $\mathcal{D}'(\mathbf{T} \times \mathbf{T})$ étant d'ordre fini il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que,

$$|\langle T(e^{ikx}), \varphi \rangle| \leq C(\varphi) k^{n_0}, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbf{T}). \tag{1.5}$$

Soit $f \in C_+^\infty(\mathbf{T})$. Posons $F_N = \sum_{k=0}^N f_k e^{ikx}$. Alors (F_N) converge vers f dans $C_+^\infty(\mathbf{T})$ donc $(T(F_N))$ converge vers $T(f)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$. D'autre part, $T(F_N) = \sum_{k=0}^N f_k T(e^{ikx})$ converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k T(e^{ikx})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ d'après (1.5) et le fait que $|f_k| \leq C_j k^{-j}$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ donc,

$$T(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k T(e^{ikx}), \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{T}).$$

On déduit de l'hypothèse que $T(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \Pi(be^{ikx})$. En utilisant le fait que Π est continu de $\mathcal{D}'$ dans lui même et (1.5) on obtient aisément que $T(f) = \Pi(b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{ikx}) = \Pi(bf)$.

Point 2. Il existe $b \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ telle que, $T(e^{ikx}) = \Pi(be^{ikx})$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Rappelons que $S^*TS = T$ et posons,

$$b = \sum_{k \geq 1} \langle T(S^k \mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1} \rangle \, e^{-ikx} + T(\mathbf{1}).$$

Tout d'abord la série ci-dessus définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$. En effet, par définition de S on a, $S^j\mathbf{1} = e^{ijx}$ et donc,

$$b_k := \langle T(S^k\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle = \langle T(e^{ikx}) \,|\mathbf{1}\rangle,$$

de sorte que $|b_k| \leq Ck^{n_0}$ d'après (1.5).

On va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $T(e^{ikx}) = \Pi(be^{ikx})$.

En effet cette formule est vraie pour $k = 0$. Supposons que $T(e^{ikx}) = \Pi(be^{ikx})$ à l'ordre $0 \leq k < m$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Pi(be^{imx}) &= \sum_{k=1}^{m} \langle T(S^k\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle\, e^{i(m-k)x} + S^m T(\mathbf{1}),\\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \langle T(S^k\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle\, e^{i(m-1-k)x} e^{ix} + \langle T(S^{m-1}\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle + S^m T(\mathbf{1}),\\
&= S\left(\sum_{k=1}^{m-1} \langle T(S^k\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle\, e^{i(m-1-k)x} + S^{m-1}T(\mathbf{1})\right) + \langle T(S^m\mathbf{1})) \,|\, \mathbf{1}\rangle,\\
&= S\Pi(be^{i(m-1)x}) + \langle T(S^m\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle.
\end{aligned}$$

Utilisant la récurrence on obtient,

$$\Pi(be^{imx}) = ST(e^{i(m-1)x}) + \langle T(S^m\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle = ST(S^{m-1}(\mathbf{1})) + \langle T(S^m\mathbf{1}) \,|\, \mathbf{1}\rangle. \tag{1.6}$$

Ensuite pour $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ on a $\Pi(e^{-ix}g) = e^{-ix}g - e^{-ix}\langle g \,|\, \mathbf{1}\rangle$. Comme $S^*TS = T$ on a,

$$\Pi(e^{-ix}T(S^m\mathbf{1})) = T(S^{m-1}\mathbf{1}) = e^{-ix}T(S^m\mathbf{1}) - e^{-ix}\langle\, T(S^m\mathbf{1}) \,|\mathbf{1}\rangle.$$

En multipliant les deux membres par e^{ix} on en déduit,

$$ST(S^{m-1}\mathbf{1}) = T(S^m\mathbf{1}) - \langle\, T(S^m\mathbf{1}) \,|\mathbf{1}\rangle.$$

Utilisant (1.6) on obtient finalement,

$$\Pi(be^{imx}) = T(S^m\mathbf{1}),$$

ce qui termine la récurrence et la preuve du Théorème 1.7. □

Théorème 1.8. *(Toeplitz 1911)*

On a,

$$T_b \text{ est continu sur } L^2_+(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow b \in L^\infty(\mathbf{T}),$$

et alors $\|T_b\|_{L^2_+ \to L^2_+} = \|b\|_{L^\infty}$.

On considère l'opérateur $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ de domaine $H^1_+(\mathbf{T}) = \{f \in L^2_+(\mathbf{T}) : f' \in L^2_+(\mathbf{T})\}$. On a, $\langle Df, f\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} k|\widehat{f}(k)|^2 < +\infty$.

Proposition 1.9. *Si $b \in L^\infty(\mathbf{T})$ est à valeurs réelles alors pour $f, g \in L^2_+(\mathbf{T})$ on a,*

$$\langle T_b(f) \,|\, g\rangle = \langle f \,|\, T_b(g)\rangle,$$

où $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est le produit scalaire de $L^2(\mathbf{T})$.

Démonstration.

- Tout d'abord si $v \in L^2_+(\mathbf{T})$ et $w \in L^2(\mathbf{T})$ on a, $\langle v, (\mathrm{Id} - \Pi)w\rangle = 0$. En effet $v = \sum_{k\geq 0} v_k e^{ikx}$ et $(\mathrm{Id} - \Pi)w = \sum_{\ell<0} w_\ell e^{i\ell x}$ de sorte que,

$$\langle v, (\mathrm{Id} - \Pi)w\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\geq 0}\sum_{\ell<0} v_k \overline{w_\ell}\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)x}\,dx,$$

  et l'intégrale du membre de droite est nulle car $k - \ell > 0$.

- Ensuite si $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ on a, $\langle \Pi(f), g\rangle = \langle f, \Pi(g)\rangle$. En effet, on écrit,

$$\begin{aligned}\langle \Pi(f), g\rangle &= \langle \Pi(f), \Pi(g) + (\mathrm{Id} - \Pi)(g)\rangle = \langle \Pi(f), \Pi(g)\rangle = \langle f + (\mathrm{Id} - \Pi)(f), \Pi(g)\rangle \\ &= \langle f, \Pi(g)\rangle.\end{aligned}$$

- Comme $b \in L^\infty(\mathbf{T})$ est réelle on a, pour $f, g \in L^2_+(\mathbf{T})$ (donc $\Pi(f) = f, \Pi(g) = g$)

$$\langle \Pi(bf) \,|\, g\rangle = \langle bf \,|\, \Pi(g)\rangle = \langle f \,|\, bg\rangle = \langle f \,|\, \Pi(bg) + (\mathrm{Id} - \Pi)(bg)\rangle = \langle f \,|\, \Pi(bg)\rangle,$$

  d'après le premier point.

$\square$

2 Paires de Lax

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace des états et $S(t)$ un flot i.e. $\mathcal{E} \ni u_0 \mapsto S(t)u_0 \in \mathcal{E}$. Une* **paire de Lax** *associée à ce flot est la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et de deux opérateurs sur $\mathcal{H}$, L_u, B_u pour $u \in \mathcal{E}$, tels que si $u(t) = S(t)u_0$ on a,*

$$\frac{d}{dt}L_{u(t)} = \big[B_{u(t)}, L_{u(t)}\big].$$

L'interêt de la paire de Lax réside dans ce qui suit.

Si on résout l'équation différentielle linéaire,

$$\dot{U}(t) = B_{u(t)}U(t), \quad U(0) = \mathrm{Id},$$

alors $U(t)$ est inversible pour tout t. En effet, soit $V(t)$ la solution du problème,

$$\dot{V}(t) = -V(t)B_{u(t)}, \quad V(0) = \mathrm{Id}.$$

On a,

$$\frac{d}{dt}\big(V(t)U(t)\big) = \dot{V}(t)U(t) + V(t)\dot{U}(t) = -V(t)B_{u(t)}U(t) + V(t)B_{u(t)}U(t) = 0,$$

avec $V(0)U(0) = \mathrm{Id}$. Alors trivialement $V(t)U(t) = \mathrm{Id}$. Ensuite,

$$\frac{d}{dt}\big(U(t)V(t)\big) = \dot{U}(t)V(t) + U(t)\dot{V}(t) = B_{u(t)}U(t)V(t) - U(t)V(t)B_{u(t)} = \big[B_{u(t)}, U(t)V(t)\big],$$

avec $U(0)V(0) = \mathrm{Id}$. L'équation différentielle $\dot{X}(t) = B_{u(t)}X(t) - X(t)B_{u(t)}$, avec $X(0) = \mathrm{Id}$, admet une solution unique et $X(t) = \mathrm{Id}$ est solution. On en déduit que $U(t)V(t) = \mathrm{Id}$. Il en résulte que $U(t)$ est inversible et que $U(t)^{-1} = V(t)$.

Ensuite on a,

$$(1) := \frac{d}{dt}\big(V(t)L_{u(t)}U(t)\big) = 0.$$

En effet par définition de la paire de Lax on a,

$$\begin{aligned}(1) &= \dot{V}(t)L_{u(t)}U(t) + V(t)\big(\frac{d}{dt}L_{u(t)}\big)U(t) + V(t)L_{u(t)}\dot{U}(t),\\ &= -V(t)B_{u(t)}L_{u(t)}U(t) + V(t)\big[B_{u(t)}, L_{u(t)}\big]U(t) + V(t)L_{u(t)}B_{u(t)}U(t) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que, puisque $U(0) = V(0) = \mathrm{Id}$,

$$V(t)L_{u(t)}U(t) = L_{u(0)},$$

ou encore,

$$L_{u(t)} = U(t)L_{u(0)}U(t)^{-1}.$$

En particulier si $L_{u(t)}$ a un spectre constitué de valeurs propres alors $L_{u(t)}$ a les mêmes valeurs propres que $L_{u(0)}$, ce qui fournit des quantités conservées.

3 Exemple 1: l'équation de Benjamin-Ono

Il s'agit de l'équation,

$$\partial_t u = \partial_x |D_x| u - \partial_x(|u|^2), \quad x \in \mathbf{T}, t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

On cherche des solutions à valeurs réelles (donc pas dans des espaces de Hardy).

Cette équation est une approximation de celle des "water waves" en dimension deux, en régime d'ondes longues et en profondeur infinie. Elle est non locale.

On travaillera dans des espaces de Sobolev $H^s_r(\mathbf{T}) = \{u \in H^s(\mathbf{T}) : u : \mathbf{T} \to \mathbf{R}\}$.

Proposition 3.1. *(Saut 1979)*

Pour tout $R>0$ il existe $T(R)>0$ tel que pour tout $u_0 \in H^2_r(\mathbf{T})$, $\|u_0\|_{H^2} \le R$, le problème (3.1) avec $u|_{t=0} = u_0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-T(R), T(R)]$.

La preuve utilise un schéma itératif,

$$\partial_t u^{n+1} = \partial_x |D_x| u^{n+1} - 2u^n \partial_x u^{n+1}, \quad u^{n+1}(0) = u_0.$$

3.1 La paire de Lax

Le résultat principal de ce paragraphe est que cette équation admet une paire de Lax.

Théorème 3.2. *Soit $u : I \to H^2_r(\mathbf{T})$, une solution de (3.1). Posons,*

$$L_{u(t)} = D_x - T_{u(t)}, \quad (\textit{domaine } H^2_r(\mathbf{T})), \quad B_{u(t)} = iT_{|D_x|u(t)} - i\big(T_{u(t)}\big)^2.$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} L_{u(t)} = \big[B_{u(t)}, L_{u(t)}\big].$$

Démonstration. Notons que $B_u^* = -B_u$ et d'après la Proposition 1.9 on a, $\langle T_u(f), g\rangle = \langle f, T_u(g)\rangle$ pour $f, g \in L^2_+(\mathbf{T})$.

Rappelons les notations. Ici $\mathcal{H} = L^2_+(\mathbf{T}), \Pi : L^2(\mathbf{T}) \to L^2_+(\mathbf{T}),$. Si $b \in L^\infty(\mathbf{T}), T_b : L^2_+(\mathbf{T}) \to L^2_+(\mathbf{T})$ est donné par, $T_b f = \Pi(bf)$. Pour $u \in H^2(\mathbf{T}), L_u = D_x - T_u$ est continu de $H^1_+(\mathbf{T})$ dans $L^2_+(\mathbf{T})$. Utilisant l'équation (3.1) on peut écrire,

$$(1) := \frac{d}{dt} L_{u(t)} = -T_{\partial_t u(t)} = -T_{\partial_x |D_x| u(t)} + 2T_{u(t)\partial_x u(t)}.$$

Le calcul suivant se fera à t fixé que l'on omettra.

Comme $[\partial_x, T_b] = T_{\partial_x b}$ et $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$ on a,

$$(1) = i\,[T_{|D_x|u}, D_x] + 2T_{u\partial_x u} = i\,[T_{|D_x|u}, D_x - T_u] + 2T_{u\partial_x u} + i[T_{|D_x|u}, T_u].$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} L_{u(t)} = i\,[T_{|D_x|u}, L_u] + 2T_{u\partial_x u} + i[T_{|D_x|u}, T_u]. \tag{3.2}$$

Nous allons calculer le deuxième terme du membre de droite. On utilisera pour cela le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Pour* $a, b \in L^\infty(\mathbf{T})$, $f \in L^2_+(\mathbf{T})$ *on a,*

$$(T_{ab} - T_a T_b)f = \Pi\Big(\Pi(a)(\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi)(b)f\big\}\Big)$$

Supposons un instant ce lemme prouvé. On a,

$$(2) := i[T_{|D_x|u}, T_u]f = i\Big(T_{|D_x|u}T_u - T_{u|D_x|u}\Big)f + i\Big(T_{u|D_x|u} - T_u T_{|D_x|u}\Big).$$

On applique le lemme ci-dessus avec successivement $a = |D_x|u, b = u$ puis $a = u, b = |D_x|u$. Il vient,

$$(2) = -i\Pi\Big(\Pi(|D_x|u)(\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi)(u)f\big\}\Big) + i\Pi\Big(\Pi(u)(\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi)(|D_x|u)f\big\}\Big).$$

Ensuite si $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$ on a $|D_x|v(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k|\widehat{v}(k)e^{ikx}$ et,

$$\begin{aligned}
\Pi(|D_x|v)(x) &= \sum_{k\geq 0} |k|\,\widehat{v}(k)e^{ikx} = \sum_{k\geq 0} k\,\widehat{v}(k)e^{ikx} = \frac{1}{i}\partial_x \sum_{k\geq 0} \widehat{v}(k)e^{ikx} = \frac{1}{i}\partial_x(\Pi v)(x)\\
&= \frac{1}{i}(\Pi\partial_x v)(x),\\
(\mathrm{Id} - \Pi)(|D_x|v)(x) &= \sum_{k<0} |k|\,\widehat{v}(k)e^{ikx} = -\sum_{k<0} k\,\widehat{v}(k)e^{ikx} = -\frac{1}{i}\partial_x \sum_{k<0} \widehat{v}(k)e^{ikx}\\
&= i(\mathrm{Id} - \Pi)\partial_x v(x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$(2) = -\Pi\Big(\Pi(\partial_x u)(\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi)(u)f\big\}\Big) - \Pi\Big(\Pi(u)(\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi)(\partial_x u)f\big\}\Big).$$

En appliquant à nouveau le Lemme 3.3 on obtient, par définition de (2),

$$\begin{aligned}
i[T_{|D_x|u}, T_u] &= -\Big(T_{u\partial_x u} - T_{\partial_x u}T_u\Big)f - \Big(T_{u\partial_x u} - T_u T_{\partial_x u}\Big)f,\\
&= -2T_{u\partial_x u} + T_{\partial_x u}T_u + T_u T_{\partial_x u}.
\end{aligned}$$

Ensuite on remarque que,

$$\begin{aligned}
[T_u^2, D_x] &= T_u[T_u, D_x] + [T_u, D_x]T_u = -\frac{1}{i}T_u T_{\partial_x u} - \frac{1}{i}T_{\partial_x u}T_u,\\
&= i(T_u T_{\partial_x u} + T_{\partial_x u}T_u),
\end{aligned}$$

de sorte que, du fait que T_u^2 commute avec T_u et par définition de L_u on a,

$$i[T_{|D_x|u}, T_u] = -2T_{u\partial_x u} + \frac{1}{i}[T_u^2, D_x] = -2T_{u\partial_x u} - i[T_u^2, D_x - T_u] = -2T_{u\partial_x u} - i[T_u^2, L_u].$$

Utilisant (3.2) il vient, finalement,

$$\frac{d}{dt}L_u = i\,[T_{|D_x|u}, L_u] - i[T_u^2, L_u] = [B_u, L_u],$$

ce qui termine la preuve du Théorème 3.2. $\square$

Il nous reste à prouver le Lemme 3.3.

Démonstration du Lemme 3.3. Pour $f \in L^2_+(\mathbf{T})$ on a,

$$T_{ab}f - T_aT_bf = \Pi\big(abf\big) - \Pi\big(a\Pi\big(bf\big)\big) = \Pi(aU), \quad U = \big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf).$$

On écrit,

$$a\big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf) = \Pi(a)\big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf) + \big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(a)\big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf) = (1) + (2).$$

Le terme (2) a toutes ses fréquences strictement négatives donc $\Pi((2)) = 0$. D'où,

$$\Pi\big(aU\big) = \Pi\big(\Pi(a)\big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf)\big) \tag{3.3}$$

Ensuite posons, $g = \big(\mathrm{Id} - \Pi\big)(bf)$. On écrit, $bf = \Pi(b)f + (\mathrm{Id} - \Pi\big)(b)f$. Comme $f \in L^2_+(\mathbf{T}), \Pi(b)f$ a toutes ses fréquences positives ou nulles de sorte que $g = (\mathrm{Id} - \Pi)\big\{(\mathrm{Id} - \Pi\big)(b)f\big\}$, ce qui prouve le lemme. □

Remarque 3.4. L'équation de KDV s'écrit :

$$\partial_t u = 6u\,\partial_x u - \partial_x^3 u.$$

Elle admet également une paire de Lax :

$$L_u = -\partial_x^2 + u, \quad B_u = -4\,\partial_x^3 + 6u\,\partial_x + 3\,\partial_x u.$$

Voici une application du Théorème 3.2.

Proposition 3.5. *Supposons que u soit une solution régulière de (3.1) sur $[0,T]$ à valeurs réelles. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout t on a,*

$$\langle L^k_{u(t)}\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}\rangle = \langle L^k_{u_0}\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}\rangle$$

Démonstration. On montre par récurrence sur k que,

$$\frac{d}{dt}L^k_{u(t)} = \big[B_{u(t)}, L^k_{u(t)}\big].$$

Cette égalite est vraie pour $k = 1$. Supposons la vraie à l'ordre k. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L_{u(t)}L^k_{u(t)} &= \big(\frac{d}{dt}L_{u(t)}\big)L^k_{u(t)} + L_{u(t)}\big(\frac{d}{dt}L^k_{u(t)}\big) = \big[B_{u(t)}, L_{u(t)}\big]L^k_{u(t)} + L_{u(t)}\big[B_{u(t)}, L^k_{u(t)}\big], \\ &= \big[B_{u(t)}, L^{k+1}_{u(t)}\big].\end{aligned}$$

Comme $B^*_{u(t)} = -B_{u(t)}$ et $L^*_{u(t)} = L_{u(t)}$ sur $L^2_+(\mathbf{T})$, on déduit de cette formule que,

$$\frac{d}{dt}\langle L^k_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}\rangle = \langle \big[B_{u(t)}, L^k_{u(t)}\big]\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}\rangle = -\langle L^k_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, B_{u(t)}\mathbf{1}\rangle - \langle B_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, L^k_{u(t)}\mathbf{1}\rangle.$$

Or comme $\Pi(u(t)) = T_{u(t)}\mathbf{1} = -L_{u(t)}\mathbf{1}$ il vient,

$$\begin{aligned} B_{u(t)}\mathbf{1} &= iT_{|D_x|u(t)}\mathbf{1} - iT^2_{u(t)}\mathbf{1} = i\big(\Pi(|D_x|u(t)) - T^2_{u(t)}\mathbf{1}\big) = i\big(\Pi(D_x u(t)) - T^2_{u(t)}\mathbf{1}\big), \\ &= i\big(D_x\Pi(u(t)) - T^2_{u(t)}\mathbf{1}\big) = i\big(D_x - T_{u(t)}\big)T_{u(t)}\mathbf{1} = -iL^2_{u(t)}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\frac{d}{dt}\langle L^k_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1}\rangle = -i\langle L^k_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, L^2_{u(t)}\mathbf{1}\rangle + i\langle L^2_{u(t)}\mathbf{1} \,|\, L^k_{u(t)}\mathbf{1}\rangle = 0.$$

$\square$

3.2 Forme explicite des solutions

Théorème 3.6. *Soit $u \in C^0(\mathbf{R}, H^2_r(\mathbf{T}))$ une solution de l'équation de BO avec $u(0) = u_0$. Alors $\Pi(u)(t, \cdot)$ se prolonge en une fonction holomorphe $\underline{\Pi(u)}$. sur le disque unité de $\mathbf{C}$ et pour $|z| < 1$ on a,*

$$\underline{\Pi(u)}(t, z) = \big\langle \big(\mathrm{Id} - ze^{it}e^{2itL_{u_0}}S^*\big)^{-1}\Pi(u_0) \,|\, \mathbf{1}\big\rangle.$$

Démonstration. Rappelons que si $B_u = iT_{|D_x|u} - i(T_u)^2$ on a, $B_u\mathbf{1} = -i(L_u)^2\mathbf{1}$.

On utilisera le lemme suivant.

Lemme 3.7.

$$\big[S^*, B_u\big] = i\Big((L_u + \mathrm{Id})^2 S^* - S^*(L_u)^2\Big).$$

Admettons un instant ce lemme et montrons comment il implique le théorème. On a,

$$\begin{aligned} \underline{\Pi(u)}(t, z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\langle \Pi(u)(t, \cdot), e^{inx}\rangle z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle (S^*)^n\Pi(u)(t, \cdot), \mathbf{1}\rangle z^n, \\ &= \big\langle \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (S^*)^n\Pi(u)(t, \cdot), \mathbf{1}\big\rangle = \langle (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1}\Pi(u)(t, \cdot), \mathbf{1}\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Soit $U(t)$ la solution du problème,

$$\frac{d}{dt}U(t) = B_{u(t)}U(t), \quad U(0) = \mathrm{Id}. \tag{3.5}$$

Alors $U(t)$ est un opérateur unitaire et on peut écrire,

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{Id} - zS^*)^{-1}\Pi(u)(t,\cdot), \mathbf{1}\rangle &= \big\langle U(t)^*(\mathrm{Id} - zS^*)^{-1}U(t)U(t)^*\Pi(u)(t,\cdot), U(t)^*\mathbf{1}\big\rangle, \\
&= \Big\langle \big(\mathrm{Id} - z\,U(t)^*S^*U(t)\big)^{-1}U(t)^*\Pi(u(t,\cdot)), U(t)^*\mathbf{1}\Big\rangle.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ensuite comme $U(t)^*U(t) = \mathrm{Id}$ on a,

$$\big(\frac{d}{dt}U(t)^*\big)U(t) + U(t)^*\big(\frac{d}{dt}U(t)\big) = 0$$

et donc, en utilisant (3.5),

$$\frac{d}{dt}U(t)^* = -U(t)^*\big(\frac{d}{dt}U(t)\big)U(t)^* = -U(t)^*B_{u(t)}U(t)U(t)^* = -U(t)^*B_{u(t)}. \tag{3.7}$$

Comme $B_{u(t)}\mathbf{1} = -i\big(L_{u(t)}\big)^2\mathbf{1}$ il vient,

$$\frac{d}{dt}U(t)^*\mathbf{1} = iU(t)^*\big(L_{u(t)}\big)^2\mathbf{1} = iU(t)^*\big(L_{u(t)}\big)^2U(t)U(t)^*\mathbf{1}$$

Rappelons que,

$$U(t)^*L_{u(t)}U(t) = L_{u_0}. \tag{3.8}$$

On peut donc écrire,

$$\frac{d}{dt}U(t)^*\mathbf{1} = iU(t)^*L_{u(t)}\mathbf{1} = i(L_{u_0})^2U(t)^*\mathbf{1}.$$

Comme $U(0)^* = \mathrm{Id}$, on en déduit que,

$$U(t)^*\mathbf{1} = e^{it(L_{u_0})^2}\mathbf{1}. \tag{3.9}$$

Comme $L_u\mathbf{1} = -\Pi(u)$ on a,

$$\begin{aligned}
U(t)^*\Pi(u(t)) &= -U(t)^*L_{u(t)}U(t)U(t)^*\mathbf{1} = -L_{u_0}U(t)^*\mathbf{1} = -L_{u_0}e^{it(L_{u_0})^2}\mathbf{1}, \\
&= -e^{it(L_{u_0})^2}L_{u_0}\mathbf{1} = e^{it(L_{u_0})^2}\Pi(u_0).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilisant (3.5) et (3.7) il vient,

$$\frac{d}{dt}\big[U(t)^*S^*U(t)\big] = U(t)^*[S^*, B_{u(t)}]U(t).$$

D'après le Lemme 3.7 il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(U(t)^*S^*U(t)\Big) &= iU(t)^*\big(L_{u(t)} + \mathrm{Id}\big)^2U(t)U(t)^*S^*U(t) - iU(t)^*S^*U(t)U(t)^*(L_{u(t)})^2U(t), \\
&= i\big(L_{u_0} + \mathrm{Id}\big)^2\Big(U(t)^*S^*U(t)\Big) - i\Big(U(t)^*S^*U(t)\Big)(L_{u_0})^2,
\end{aligned}$$

avec $U(t)^* S^* U(t)|_{t=0} = S^*$.

C'est un problème de Cauchy que l'on peut résoudre et l'on trouve,

$$U(t)^* S^* U(t) = e^{it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2} S^* e^{-it(L_{u_0})^2}. \tag{3.11}$$

En utilisant (3.4), (3.6), (3.10), (3.11), (3.9) on obtient,

$$\begin{aligned}
\underline{\Pi(u)}(tz) &= \big\langle \big(\mathrm{Id} - ze^{it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2} S^* e^{-it(L_{u_0})^2}\big)^{-1} e^{it(L_{u_0})^2} \Pi(u_0), e^{it(L_{u_0})^2} \mathbf{1} \big\rangle, \\
&= \big\langle e^{-it(L_{u_0})^2} \big(\mathrm{Id} - ze^{it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2} S^* e^{-it(L_{u_0})^2}\big)^{-1} e^{it(L_{u_0})^2} \Pi(u_0), \mathbf{1} \big\rangle, \\
&= \big\langle \big(\mathrm{Id} - ze^{-it(L_{u_0})^2} e^{it(L_{u_0}+\mathrm{Id})^2} S^*\big)^{-1} \Pi(u_0), \mathbf{1} \big\rangle, \\
&= \big\langle \big(\mathrm{Id} - ze^{it} e^{2itL_{u_0}} S^*\big)^{-1} \Pi(u_0), \mathbf{1} \big\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule désirée. □

Démonstration du Lemme 3.7. On a,

$$[T_b, S]f = \langle f \,|\, S^* \Pi(\overline{b}) \rangle \mathbf{1}.$$

En effet, $T_b S f = \Pi(e^{ix} b f)$. D'autre part, $bf(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k e^{ikx}$, de sorte que $e^{ix} bf(x) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \alpha_{\ell-1} e^{i\ell x}$, donc,

$$T_b S f = \sum_{\ell\geq 0} \alpha_{\ell-1} e^{i\ell x} = \alpha_{-1} + e^{ix} \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{ikx} = \alpha_{-1} + e^{ix} \Pi(bf) = \alpha_{-1} + S T_b f.$$

Ensuite, comme $f \in L^2_+(\mathbf{T})$,

$$(bf)_{-1} = \langle bf \,|\, e^{-ix} \rangle = \langle f \,|\, \overline{b}\, e^{-ix} \rangle = \langle f \,|\, \Pi(\overline{b}\, e^{-ix}) \rangle = \langle f \,|\, \Pi(e^{-ix} \Pi(\overline{b}) \rangle = \langle f \,|\, S^* \Pi(\overline{b}) \rangle,$$

ce qui prouve notre assertion. On en déduit que,

$$T_b S f = S T_b f + \langle f, S^* \Pi(\overline{b}) \rangle \mathbf{1}. \tag{3.12}$$

L'adjoint de $T_b S$ est $S^* T_{\overline{b}}$, celui de $S T_b$ est $T_{\overline{b}} S^*$. D'autre part si on note K^* l'adjoint de $f \mapsto \langle f \,|\, S^* \Pi(\overline{b}) \rangle$ on peut écrire,

$$\int_{\mathbf{T}} \langle f \,|\, S^* \Pi(\overline{b}) \rangle \overline{g(y)}\, dy = \int_{\mathbf{T}} f(x) \overline{S^* \Pi(\overline{b})(x)} \Big(\int_{\mathbf{T}} \overline{g(y)}\, dy \Big)\, dx,$$

de sorte que,

$$K^* g(x) = S^* \Pi(\overline{b})(x) \int_{\mathbf{T}} g(y)\, dy = \langle g \,|\, \mathbf{1} \rangle S^* \Pi(\overline{b})(x).$$

Comme $[T_b, S]^* = [S^*, T_{\overline{b}}]$ on déduit de (3.12) que,

$$[S^*, T_{\overline{b}}]\, g(x) = \langle g \,|\, \mathbf{1} \rangle S^* \Pi(\overline{b})(x). \tag{3.13}$$

D'autre part, comme $L_u = D_x - T_u$ il résulte de (3.12) que, si u est réelle,

$$L_u Sf = S\{(L_u + \mathrm{Id})f\} - \langle f \,|\, S^*\Pi(u)\rangle \mathbf{1}.$$

En passant à l'adjoint il vient,

$$S^* L_u\, g(x) = (L_u + \mathrm{Id})S^* g(x) - \langle g \,|\, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u)(x). \tag{3.14}$$

Ensuite,

$$[S^*, B_u]f = i\big([S^*, T_{|D_x|u}]f - [S^*, T_u^2]f\big) = i\big([S^*, T_{|D_x|u}]f - [S^*, T_u]T_u f - T_u[S^*, T_u]f\big).$$

Utilisant (3.13) avec, $b = |D_x|u$ et $b = u$ il vient,

$$\frac{1}{i}[S^*, B_u]f = \langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(|D_x|u) - \langle T_u f, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u) - \langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle T_u\big(S^*\Pi(u)\big).$$

Comme $\Pi(|D_x|u) = \Pi(D_x u) = D_x \Pi(u)$ et $S^* D_x g = D_x S^* g + S^* g$ il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}[S^*, B_u]f &= \langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle \big(D_x + \mathrm{Id} - T_u\big) S^*\Pi(u) - \langle T_u f, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u),\\
&= \langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle (L_u + \mathrm{Id}) S^*\Pi(u) - \langle f \,|\, T_u \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u),\\
&= \langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle (L_u + \mathrm{Id}) S^*\Pi(u) + \langle f \,|\, L_u \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u).
\end{aligned}$$

D'après (3.14) on a,

$$\langle f \,|\, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u) = (L_u + \mathrm{Id})S^* f - S^* L_u f,$$

de sorte que,

$$\frac{1}{i}[S^*, B_u]f = (L_u + \mathrm{Id})\big\{(L_u + \mathrm{Id})S^* f - S^* L_u f\big\} + \langle L_u f \,|\, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u). \tag{3.15}$$

D'après (3.14), appliquée à $g = L_u f$,

$$\langle L_u f \,|\, \mathbf{1}\rangle S^*\Pi(u) = (L_u + \mathrm{Id})S^* L_u f - S^* L_u^2 f.$$

Utilisant (3.15) il vient finalement,

$$\frac{1}{i}[S^*, B_u]f = (L_u + \mathrm{Id})^2 S^* f - S^* L_u^2 f,$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

3.3 Existence en basse régularité

Une analyse détaillée de la formule explicite du paragraphe précédent va nous permettre de prolonger le flot de l'équation de Benjamin-Ono à des espaces de régularités plus basses.

On introduit les espaces suivants.

Définition 3.8. *Pour $s \in \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ on pose, avec $\langle k \rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$,*

$$H^{s,\log^\alpha}(\mathbf{T}) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{T}) : \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle k \rangle^{2s} \big(\log(2+|k|)\big)^{2\alpha} |\widehat{u}(k)|^2 < +\infty\}, \tag{3.16}$$

et $H_r^{s,\log^\alpha}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}'_r(\mathbf{T}) \cap H^{s,\log^\alpha}(\mathbf{T})$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 3.9. *Le flot de (BO) se prolonge de manière continue en une application de $H^{-\frac{1}{2},\log^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{T})$ dans $C^0(\mathbf{R}, H^{-\frac{1}{2},\log^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{T}))$. De plus les trajectoires sont relativement compactes à valeurs dans $H^{-\frac{1}{2},\log^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{T})$.*

3.3.1 Etude spectrale de l'opérateur $L_u = D_x - T_u$.

Proposition 3.10. *Soit $u \in H_r^{-\frac{1}{2},\log^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{T})$. Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, C_\varepsilon(u) > 0 : \quad |\langle T_u f, f \rangle| \leq \varepsilon \, \langle Df \,|\, f \rangle + C_\varepsilon(u) \|f\|_{L^2}^2, \quad \forall f \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}).$$

La preuve utilisera le lemme de produit suivant.

Lemme 3.11. *Il existe $C > 0$ telle que pour tous $f, g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$,*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{\langle k \rangle}{\big(Log(2+|k|)\big)} |\widehat{fg}(k)|^2 \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.$$

Supposons ce lemme prouvé et montrons comment il implique la proposition.

Démonstration de la Proposition 3.10. Comme $f \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ on a, $\langle (\mathrm{Id} - \Pi)(uf), f \rangle = 0$ de sorte que,

$$\langle T_u f \,|\, f \rangle = \langle \Pi(uf) \,|\, f \rangle = \langle uf \,|\, f \rangle = \langle u \,|\, |f|^2 \rangle.$$

Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_{u>N} = \sum_{|k|>N} \widehat{u}(k) e^{ikx}$ vérifie, $\|u_{>N}\|_{H^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{C}$. Posons, $C'_\varepsilon(u) = \|u_{\leq N}\|_{L^\infty}$. Alors,

$$\langle u \,|\, |f|^2 \rangle = \langle u_{\leq N} \,|\, |f|^2 \rangle + \langle u_{>N} \,|\, |f|^2 \rangle = (1) + (2).$$

On a, d'une part, $(1) \leq \|u_{\leq N}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}^2 \leq C'_\varepsilon(u) \|f\|_{L^2}^2$, et d'autre part, d'après le lemme,

$$(2) \leq \|u_{>N}\|_{H^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}} \|f\overline{f}\|_{H^{\frac{1}{2},\log^{-\frac{1}{2}}}} \leq \varepsilon \, \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \varepsilon \, \langle Df \,|\, f \rangle + c\|f\|_{L^2}^2.$$

$\square$

Démonstration du Lemme 3.11. Avec les notations classiques on a,

$$f = S_{-1}(f) + \sum_{p=0}^{+\infty} \Delta_p(f), \quad g = S_{-1}(g) + \sum_{q=0}^{+\infty} \Delta_q(g),$$

de sorte que,

$$fg = \sum_p S_{p-2}(f)\Delta_p(g) + \sum_p S_{p-2}(g)\Delta_p(f) + \sum_{\nu \in \{-1,0,1\}} \sum_p \Delta_p(f)\Delta_{p+\nu}(g) = (1) + (2) + (3).$$

Le spectre de (3) est contenu dans l'intervalle $[-2^{-p-2}, 2^{p+2}]$ et,

$$2^{\frac{p}{2}} \|\Delta_p(f)\Delta_{p+\nu}(g)\|_{L^2} \leq 2^{\frac{p}{2}} \|\Delta_p(f)\|_{L^2} \|\Delta_{p+\nu}(g)\|_{L^\infty} \leq 2^{\frac{p}{2}} \|\Delta_p(f)\|_{L^2} 2^{\frac{p}{2}} \|\Delta_{p+\nu}(g)\|_{L^2},$$

de sorte que,

$$\|(3)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, comme $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ on a, $\|\Delta_k(f)\|_{L^2} \leq c_k 2^{-\frac{k}{2}}$ où $\sum_{k \geq -1} c_k^2 < +\infty$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|S_j(f)\|_{L^\infty} &\leq \sum_{k=-1}^{j} \|\Delta_k(f)\|_{L^\infty} \leq \sum_{k=-1}^{j} 2^{\frac{k}{2}} \|\Delta_k(f)\|_{L^2}, \\
&\leq \Big(\sum_{k=-1}^{j} 1\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k \geq 0} c_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{j+2}\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

et donc,

$$\|S_{p-2}(f)\Delta_p(g)\|_{L^2} \leq \sqrt{p+2}\, \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|\Delta_p(g)\|_{L^2}.$$

On en déduit que,

$$\frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{p+2}} \|S_{p-2}(f)\Delta_p(g)\|_{L^2} \in \ell^2.$$

Comme d'autre part le spectre de $S_{p-2}(f)\Delta_p(g)$ est contenu dans une couronne on a,

$$\|\sum_p S_{p-2}(f)\Delta_p(g)\|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{\log}}}} \leq C\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

$\square$

Si $u \in H_r^{-\frac{1}{2}, \log^{\frac{1}{2}}}$ on pose pour $f, g \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$,

$$Q_u(f,g) = \langle Df \,|\, g\rangle - \langle T_u f \,|\, g\rangle.$$

C'est une application bilinéaire continue qui, d'après la Proposition 3.10 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vérifie,

$$Q_u(f,f) \geq \frac{1}{2}\langle Df \,|\, f\rangle - C_{\frac{1}{2}}(u)\|f\|_{L^2}^2.$$

Alors,

$$\langle f \,|\, g\rangle_{\frac{1}{2},u} = Q_u(f,g) + (1 + C_{\frac{1}{2}}(u))\langle f \,|\, g\rangle_{L^2}$$

est un produit scalaire sur $H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ équivalent au produit scalaire usuel.

On définit alors l'opérateur $L_u = D_x - T_u$ sur,

$$\mathrm{Dom}(L_u) = \{f \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}) : \exists C > 0 : |\langle f \,|\, g\rangle_{\frac{1}{2},u}| \leq C\|g\|_{L^2}, \forall g \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})\},$$

par,

$$\langle L_u f, g\rangle = Q_u(f,f) = \langle f \,|\, g\rangle_{\frac{1}{2},u} - (1 + C_{\frac{1}{2}}(u))\langle f \,|\, g\rangle_{L^2}.$$

L'opérateur L_u est auto adjoint, uniformément minoré (si u appartient à un compact de $H^{-\frac{1}{2},\log^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{T})$ et à résolvante, $(L_u - \lambda \mathrm{Id})^{-1}$, à valeurs dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$, donc compacte à valeurs dans $L^2(\mathbf{T})$.

Proposition 3.12. *Le spectre de L_u est constitué d'une suite de valeurs propres $(\lambda_n(u))_{n\geq 1}$ qui sont simples et vérifient,*

$$\lambda_n(u) - \lambda_{n-1}(u) \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

On posera dans ce qui suit,

$$\gamma_n(u) = \lambda_n(u) - \lambda_{n-1}(u) - 1.$$

Démonstration. D'après la formule du minimax, pour $n \geq 1$ on a,

$$\lambda_{n-1}(u) = \sup_{\substack{F \subset L^2_+,\\ \dim F = n-1}} \inf_{\substack{f \in H_+^{\frac{1}{2}}, f \in F^\perp \\ \|f\|_{L^2}=1}} \langle L_u f, f\rangle, \quad L_u = D_x - T_u. \tag{3.17}$$

Soit $G = \mathbf{C1} \oplus^\perp SF$ où $Sf = e^{ix}f$. Alors G est un sous espace de L^2 de dimension n. D'autre part $g \in G^\perp$ si et seulement si $g = Sh$, où $h \in F^\perp$, de sorte que $G^\perp = S(F^\perp)$. Maintenant si $g \in G^\perp$ on a $g = Sf$, $f \in F^\perp$ et donc,

$$\begin{aligned}
\langle L_u g, g\rangle &= \langle L_u Sf, Sf\rangle = \langle D_x Sf \,|\, Sf\rangle - \langle T_u Sf \,|\, Sf\rangle,\\
&= \langle SD_x f \,|\, Sf\rangle + \langle Sf \,|\, Sf\rangle - \langle S^* T_u Sf \,|\, f\rangle = \langle D_x f \,|\, f\rangle + \langle f \,|\, f\rangle - \langle T_u f \,|\, f\rangle,\\
&= \langle L_u f, f\rangle + \|f\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $S^* T_u S = T_u$ par définition des opérateurs de Toeplitz.

On déduit de la formule (3.17) que,

$$\lambda_n(u) \geq \lambda_{n-1}(u) + 1,$$

le 1 venant du fait que $\|f\|_{L^2} = 1$. $\square$

Notation 3.13. On notera dans ce qui suit,

$$H_{r,0}^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T}) = \big\{u \in H_r^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T}) : \langle u, \mathbf{1}\rangle = 0\big\},$$
$$\ell^{1,\log}(\mathbf{N}^*) = \Big\{(a_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, \log(n+1) < +\infty\Big\},$$

que l'on munit de leurs normes naturelles.

Théorème 3.14. *Pour toute* $u \in H_{r,0}^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ *on a,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(u) \log(n+1) < +\infty.$$

De plus l'application, $\Gamma : u \mapsto (\gamma_n(u))$ *de* $H_{r,0}^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ *dans* $\ell^{1,\log}(\mathbf{N}^*)$ *est continue et propre.*

Pour la preuve de ce résultat crucial dans la démonstration du Théorème 3.9 on renvoie à un article de P. Gérard - P. Topalov (en préparation).

Démonstration du Théorème 3.9. Soit $u_0 \in H^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ et (u_0^ε) une suite de fonctions C^∞ qui converge vers u_0 dans cet espace. L'ensemble $\{(u_0^\varepsilon) \cup \{u_0\}\}$ étant compact on a, $\Gamma(u_0^\varepsilon) \subset$ compact. D'autre part les valeurs propres de L_{u^ε} étant invariantes par le flot, pour toute suite (t_ε) qui converge vers t on a,

$$\Gamma(S(t_\varepsilon)u_0^\varepsilon) = \Gamma(u_0^\varepsilon) \subset \text{compact}.$$

L'application Γ étant propre on déduit que $\big(S(t_\varepsilon)u_0^\varepsilon\big)$ appartient à un compact de $H^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$. Quitte à extraire une sous suite on en déduit que $S(t_\varepsilon)u_0^\varepsilon$ tend vers une limite dans $H^{-\frac{1}{2},\log\frac{1}{2}}(\mathbf{T})$ et utilisant l'expression explicite de $\overline{\Pi u_0^\varepsilon(t,z)}$ donnée par le Théorème 3.6 on identifie la limite comme solution de l'équation (3.1). □

4 Exemple 2. L'équation de Szegő cubique

Il s'agit du problème,

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u), \quad u(0) = u_0, \tag{4.1}$$

avec $u(t) \in H_+^s(\mathbf{T})$ pour s assez grand.

4.1 Existence

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 4.1. *Le problème* (4.1) *est globalement bien posé dans* $H^s_+(\mathbf{T})$ *pour tout* $s > \frac{1}{2}$.

Démonstration. On notera que pour $s > \frac{1}{2}$ $H^s_+(\mathbf{T})$ est une algèbre de sorte qu'il s'agit d'une équation différentielle ordinaire dans $H^s_+(\mathbf{T})$.

Le second membre de l'équation étant Lipschitz sur les bornés, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence, pour le problème (4.1), d'une solution maximale
$u \in C^0(I_{\max}(u_0), H^s_+(\mathbf{T}))$ et si $I := I_{\max}(u_0) \neq \mathbf{R}$ et $T \in \partial I$ on a,

$$\lim_{t\in I, t\to T} \|u(t)\|_{H^s_+(\mathbf{T})} = +\infty. \tag{4.2}$$

Nous allons montrer que $I_{\max}(u_0) = \mathbf{R}$ Notons $I_{\max} = (-T_*, T^*)$ et supposons $T^* < +\infty$ (le raisonnement sera le même si $T_* > -\infty$).

Rappelons que pour $s > \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbf{T})$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbf{T})$ et que pour $u, v \in H^s(\mathbf{T})$ on a,

$$\|uv\|_{H^s} \leq C\big(\|u\|_{H^s}\|v\|_{L^\infty} + \|v\|_{H^s}\|u\|_{L^\infty}\big). \tag{4.3}$$

L'équation possède deux lois de conservation classiques, la masse et l'impulsion i.e.

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{T})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbf{T})}, \quad \langle D_x u(t) \,|\, u(t)\rangle = \langle D_x u_0 \,|\, u_0\rangle, \quad D_x = -i\partial_x.$$

Comme $u(t) \in H^s_+(\mathbf{T}), s > \frac{1}{2}$ il en résulte que la quantité $\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})}$ reste bornée par $C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})}$.

On utilisera l'inégalité suivante,

Proposition 4.2 (Brezis-Gallouët). *Soit* $s > \frac{1}{2}$. *Il existe* $C > 0$ *telle que,*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}}\Big[\log\Big(2 + \frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}}}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $u \in H^s_+(\mathbf{T})$.

Démonstration. On peut supposer $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})} = 1$. Pour $\lambda \geq 1$ et $u \in H^s_+(\mathbf{T})$ on écrit,

$$u = u_{\leq\lambda} + u_{>\lambda}, \quad u_{\leq\lambda} = \sum_{0\leq k\leq\lambda} c_k e^{ikx}, \quad u_{>\lambda} = \sum_{k>\lambda} c_k e^{ikx},$$

Ensuite,

$$\|u_{\leq\lambda}\|_{L^\infty(\mathbf{T})} \leq \sum_{k\leq\lambda} \langle k\rangle^{-\frac{1}{2}} \langle k\rangle^{\frac{1}{2}} |c_k| \leq C\Big(\sum_{k\leq\lambda} \langle k\rangle^{-1}\Big)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T})} \leq C'\big(\log\lambda\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u_{>\lambda}\|_{L^\infty(\mathbf{T})} \leq \sum_{k>\lambda} \langle k\rangle^{-s} \langle k\rangle^{s} |c_k| \leq \Big(\sum_{k>\lambda} \langle k\rangle^{-2s}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k>\lambda} \langle k\rangle^{2s} |c_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\lambda^{-s+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^s}.$$

On en déduit,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\big((\log\lambda)^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-s+\frac{1}{2}}\|u\|_{H^s}\big). \tag{4.4}$$

Prenons λ tel que $\lambda^{s-\frac{1}{2}} = 2 + \|u\|_{H^s}$. Alors $(s-\frac{1}{2})\log\lambda = \log(2+\|u\|_{H^s})$ et l'inégalité ci-dessus implique,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\big((\log(2+\|u\|_{H^s}))^{\frac{1}{2}} + 1\big) \leq C'\big(\log(2+\|u\|_{H^s})\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

L'inégalité du lemme résulte de (4.5) appliquée à la fonction $\frac{u}{\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}}}$. $\square$

De l'inégalité (4.3) et de la continuité de Π sur les H^S on déduit que la solution de (4.1) vérifie,

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|u(t')\|_{L^\infty}^2 \|u(t')\|_{H^s}\, dt'. \tag{4.6}$$

Utilisant le Lemme 4.2 il vient,

$$\|u(t)\|_{L^\infty}^2 \leq C\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \log\big(2\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|u(t)\|_{H^s}\big) - C\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \log(\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}).$$

Comme $\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ la quantité $-C\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \log(\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}})$ est bornée par $K(u_0)$ donc,

$$\|u(t)\|_{L^\infty}^2 \leq C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \log\big(2\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|u(t)\|_{H^s}\big) + K(u_0).$$

En utilisant(4.6) on en déduit que,

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} + C\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \int_0^t \log\big(2\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|u(t')\|_{H^s}\big)\|u(t')\|_{H^s}\, dt' \\ + K(u_0)\int_0^t \|u(t')\|_{H^s}\, dt'.$$

Un argument du type "inégalité de Gronwall" dû à Osgood permet de montrer que sur $(0,T^*)$ on a, $\|u(t)\| \leq e^{e^{K'(u_0)t}}$, ce qui contredit (4.2) et montre que $T^* = +\infty$. $\square$

4.2 La paire de Lax

Théorème 4.3. *Soit pour $s > \frac{1}{2}$, $u \in C^0(\mathbf{R}, H^s_+(\mathbf{T}))$ une solution du problème (4.1) alors,*

$$\frac{d}{dt} H_{u(t)} = \big[B_{u(t)}, H_{u(t)}\big],$$

où $B_u = -iT_{|u|^2} + \frac{i}{2} H_u^2$, H_u est l'opérateur de Hankel et T_u l'opérateur de Toeplitz définis dans la section 1.

On commence par le lemme suivant.

Lemme 4.4. *Soit $a, b, c \in L^\infty_+(\mathbf{T})$. On a,*

$$H_{\Pi(a\bar{b}c)} = T_{a\bar{b}} H_c + H_a T_{b\bar{c}} - H_a H_b H_c.$$

Démonstration. Soit $f \in L^2_+(\mathbf{T})$. On a,

$$H_{\Pi(a\bar{b}c)} f = \Pi(a\bar{b}c\bar{f}) = \Pi(a\bar{b}\,\Pi(c\bar{f})) + \Pi(a\bar{b}\,(\mathrm{Id} - \Pi)(c\bar{f})) = T_{a\bar{b}} H_c f + H_a(b\overline{(\mathrm{Id} - \Pi)(c\bar{f})})$$

Ensuite, comme $b\,\overline{(\mathrm{Id} - \Pi)(c\bar{f})}$ a son spectre dans $k \geq 0$ on a,

$$\begin{aligned} b\,\overline{(\mathrm{Id} - \Pi)(c\bar{f})} &= \Pi\big(b\,\overline{(\mathrm{Id} - \Pi)(c\bar{f})}\big) = \Pi(b\bar{c}f) - \Pi(b\,\overline{\Pi(c\bar{f})}) \\ &= T_{b\bar{c}} f - H_b(\Pi(c\bar{f})) = T_{b\bar{c}} f - H_b H_c(f), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

□

Démonstration du Théorème 4.3. On a,

$$\frac{d}{dt} H_{u(t)} = H_{\partial u(t)} = -iH_{\Pi(|u(t)|^2 u(t))}.$$

Utilisant le lemme avec $a = b = c = u$ il vient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{u(t)} &= -i\big(T_{|u(t)|^2} H_{u(t)} + H_{u(t)} T_{|u(t)|^2} - H^3_{u(t)}\big), \\ &= \big(-iT_{|u(t)|^2} H_{u(t)} + \frac{i}{2} H^3_{u(t)}\big) + \big(-iH_{u(t)} T_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2} H^3_{u(t)}\big). \end{aligned}$$

Comme $H_u(ig) = \Pi(u\overline{ig}) = -i\Pi(u\bar{g}) = -iH_u(g)$ on peut écrire,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{u(t)} &= \big(-iT_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2} H^2_{u(t)}\big) H_{u(t)} - H_{u(t)}\big(-iT_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2} H^2_{u(t)}\big), \\ &= \big[B_{u(t)}, H_{u(t)}\big]. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.5. *On a,*

1. $$\frac{d}{dt}H^2_{u(t)} = \big[-iT_{|u(t)|^2}, H^2_{u(t)}\big] = \big[B_{u(t)}, H^2_{u(t)}\big].$$

2. *Soit* $\widetilde{H}_u = H_{S^*u} = S^*H_u = H_uS$. *Alors,*
$$\frac{d}{dt}\widetilde{H}_{u(t)} = \big[C_u, \widetilde{H}_{u(t)}\big], \quad C_u = -iT_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2}\widetilde{H}^2_{u(t)}.$$

4.3 Forme explicite des solutions

Comme dans le cas de l'équation de Benjamin-Ono nous allons utiliser la paire de Lax pour expliciter les solutions de Szegö en fonction de la donnée u_0.

Théorème 4.6. *Soit* $u_0 \in H^s_+(\mathbf{T}), s > \frac{1}{2}$ *et* $u(t)$ *la solution du problème* (4.1). *On a alors,*
$$\underline{u}(t,z) = \Big\langle \Big(\mathrm{Id} - z\, e^{itH^2_{u_0}}\, e^{it\widetilde{H}^2_{u_0}} S^*\Big)^{-1} e^{itH^2_{u_0}} u_0, \mathbf{1}\Big\rangle.$$

Ici $\underline{u}$ *désigne le prolongement holomorphe de* u *au disque unité et* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le produit scalaire de* $L^2(\mathbf{T})$.

Démonstration. Pour tout $v \in L^2_+(\mathbf{T})$ et pour tout $|z| < 1$ on a,

$$\underline{v}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{v}(k) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle v, S^k\mathbf{1}\rangle z^k = \langle \sum_{k=0}^{+\infty} z^k (S^*)^k v, \mathbf{1}\rangle = \langle \big(\mathrm{Id} - zS^*\big)^{-1} v, \mathbf{1}\rangle. \tag{4.7}$$

Soit $U(t)$ la solution du problème,

$$\frac{d}{dt}U(t) = B_{u(t)}U(t), \quad U(0) = \mathrm{Id}$$

où $B_{u(t)} = -iT_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2}H_{u(t)}$. Nous avons vu à la section 2 que, $U(t)^*H_{u(t)}U(t) = H_{u_0}$ et que $U(t)$ est unitaire. Appliquons la formule (4.7) à la solution $\underline{u}(t,z)$. Il vient,

$$\begin{aligned}\underline{u}(t,z) &= \big\langle U(t)^*\big(\mathrm{Id} - zS^*\big)^{-1} u(t), U(t)^*\mathbf{1}\big\rangle \\ &= \big\langle U(t)^*\big(\mathrm{Id} - zS^*\big)^{-1} U(t)U(t)^*u(t), U(t)^*\mathbf{1}\big\rangle, \\ &= \big\langle\big(\mathrm{Id} - zU(t)^*S^*U(t)\big)^{-1} U(t)^*u(t), U(t)^*\mathbf{1}\big\rangle,\end{aligned} \tag{4.8}$$

car pour tout $k \in \mathbf{N}$, $U(t)^*\big(S^*\big)^k U(t) = \big(U(t)^*S^*U(t)\big)^k$.

Nous allons calculer les termes du membre de droite de (4.8). Notons que,

$$\frac{d}{dt}U(t)^*\mathbf{1} = -U(t)^*B_{u(t)}\mathbf{1}, \quad U(0)^* = \mathrm{Id}.$$

Par définition, $B_{u(t)}\mathbf{1} = -iT_{|u(t)|^2}\mathbf{1} + \frac{i}{2}H^2_{u(t)}\mathbf{1}$. On a, $T_{|u(t)|^2}\mathbf{1} = \Pi(|u(t)|^2)$ et $H^2_{u(t)}\mathbf{1} = \Pi(u\overline{\Pi(u)}) = \Pi(|u(t)|^2)$ car $\Pi(u) = u$, puisque $u \in H^s_+(\mathbf{T})$. Donc, $B_{u(t)}\mathbf{1} = -\frac{i}{2}H^2_{u(t)}\mathbf{1}$. On en déduit que,

$$U(t)^*B_{u(t)}\mathbf{1} = -\frac{i}{2}U(t)^*H^2_{u(t)}U(t)U(t)^*\mathbf{1} = -\frac{i}{2}H^2_{u_0}U(t)^*\mathbf{1}.$$

Le problème ci-dessus s'écrit alors,

$$\frac{d}{dt}U(t)^*\mathbf{1} = \frac{i}{2}H^2_{u_0}U(t)^*\mathbf{1}, \quad U(0)^* = \mathrm{Id}$$

et fournit la solution,

$$U(t)^*\mathbf{1} = e^{i\frac{t}{2}H^2_{u_0}}\mathbf{1}. \tag{4.9}$$

Appliquant H_{u_0} aux deux membres on obtient,

$$U(t)^*u(t) = U(t)^*H_{u(t)}\mathbf{1} = H_{u_0}U(t)^*\mathbf{1} = H_{u_0}e^{\frac{i}{2}tH^2_{u_0}}\mathbf{1} = e^{-\frac{i}{2}tH^2_{u_0}}H_{u_0}\mathbf{1} = e^{-\frac{i}{2}tH^2_{u_0}}u_0, \tag{4.10}$$

car $H_{u_0}(ig) = -iH_{u_0}(g)$ et $H_{u_0}\mathbf{1} = \Pi(u_0) = u_0$.

Il nous reste à calculer $U(t)^*S^*U(t)$.

Comme d'après (4.10) $U(t)^*u(t)$ appartient à l'image de H_{u_0}, que $U(t)(\mathrm{Im}H_{u_0}) = \mathrm{Im}H_{u(t)}$ et que, $S^*\mathrm{Im}H_{u(t)}) \subset \mathrm{Im}H_{u(t)}$, il suffit de décrire $U(t)^*S^*U(t)$ sur $\mathrm{Im}H_{u_0}$. Alors,

$$U(t)^*S^*U(t)H_{u_0} = U(t)^*S^*H_{u(t)}U(t) = U(t)^*\widetilde{H}_{u(t)}U(t).$$

D'autre part,

$$\widetilde{H}_{u(t)} = V(t)\widetilde{H}_{u(t)}V(t)^*$$

où $V(t)$ est la solution du problème,

$$\frac{d}{dt}V(t) = C_{u(t)}V(t), \quad V(0) = \mathrm{Id}, \quad C(t) = -iT_{|u(t)|^2} + \frac{i}{2}\widetilde{H}^2_{u(t)}.$$

Ainsi,

$$U(t)^*S^*U(t)H_{u_0} = U(t)^*V(t)\widetilde{H}_{u_0}V(t)^*U(t). \tag{4.11}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(U(t)^*V(t)\big) &= -U(t)^*B_{u(t)}V(t) + U(t)^*C_{u(t)}V(t) = U(t)^*\big(C_{u(t)} - B_{u(t)}\big)V(t),\\ &= \frac{i}{2}U(t)^*\big(\widetilde{H}^2_{u(t)} - H^2_{u(t)}\big)V(t).\end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\frac{d}{dt}\big(U(t)^*V(t)\big) = \frac{i}{2}\big(U(t)^*V(t)\widetilde{H}_{u_0}^2 - H_{u_0}^2 U(t)^*V(t), \quad U(t)^*V(t)|_{t=0} = \mathrm{Id}.$$

En résolvant ce problème on obtient,

$$U(t)^*V(t) = e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{i\frac{t}{2}\widetilde{H}_{u_0}^2},$$

de sorte qu'en utilisant (4.11) on obtient,

$$\begin{aligned} U(t)^*S^*U(t)H_{u_0} &= e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{i\frac{t}{2}\widetilde{H}_{u_0}^2}\, \widetilde{H}_{u_0}\, e^{-i\frac{t}{2}\widetilde{H}_{u_0}^2} e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}, \\ &= e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{i\frac{t}{2}\widetilde{H}_{u_0}^2} e^{i\frac{t}{2}\widetilde{H}_{u_0}^2}\, \widetilde{H}_{u_0}\, e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} = e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{it\widetilde{H}_{u_0}^2} S^* e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} H_{u_0}. \end{aligned}$$

Ainsi sur $\mathrm{Im} H_{u_0}$ on a,

$$U(t)^*S^*U(t) = e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{it\widetilde{H}_{u_0}^2} S^* e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}.$$

On déduit de ci-dessus et de (4.10),

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Id} - zU(t)^*S^*U(t)\big)^{-1} U(t)^*u(t) &= \big(\mathrm{Id} - ze^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} e^{it\widetilde{H}_{u_0}^2} S^* e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}\big)^{-1} e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} u_0, \\ &= e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}\big(\mathrm{Id} - ze^{-itH_{u_0}^2} e^{it\widetilde{H}_{u_0}^2} S^*\big)^{-1} e^{-i\frac{t}{2}H_{u_0}^2} u_0. \end{aligned}$$

Le Théorème 4.6 découle de cette dernière égalité, de (4.8) et de (4.9). □

4.4 Existence en faible régularité, optimalité. L'effet marguerite

Le Théorème 4.6 permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.7. *(Gérard-Pushnitski)*

Le flot de Szegő se prolonge continûment à $L^2_+(\mathbf{T})$.

Le résultat suivant concerne l'optimalité du résultat précédent.

Proposition 4.8. *Pour tout $\delta > 0$ il existe une suite (v^ε) de solutions régulières (en fait des fractions rationnelles) de l'équation de Szegő cubique sur $\mathbf{T}$ et une suite de temps positifs (t^ε) tels que, lorsque $\varepsilon \to 0$,*

$$(t^\varepsilon) \to 0, \quad \|v^\varepsilon(0)\|_{H^{-\delta}} \to 0, \quad |\langle v^\varepsilon(t^\varepsilon)\,|\,\mathbf{1}\rangle| \to +\infty.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, comme $|\langle v^\varepsilon(t^\varepsilon)\,|\,\mathbf{1}\rangle \leq \|v^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^{-\delta}}$, cette proposition montre que le flot de Szegő ne peut se prolonger continument à l'espace $H^{-\delta}(\mathbf{T})$.

Nous allons, pour commencer, expliciter une solution particulière de l'équation (4.1).

Pour $\varepsilon > 0$ on considère la donnée initiale,

$$u_0^\varepsilon(x) = e^{ix} + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u_0^\varepsilon}(z) = z + \varepsilon.$$

On a, $H_{u_0^\varepsilon}(f) = \Pi(u_0^\varepsilon \overline{f})$. Si $f = \sum_{k=0}^N a_k e^{ikx}$ on a,

$$(e^{ix} + \varepsilon)\overline{f} = \overline{a_0}e^{ix} + (\overline{a_1} + \varepsilon\overline{a_0}) + (\overline{a_2} + \varepsilon\overline{a_1})e^{-ix} \ldots,$$

de sorte que,

$$\Pi(u_0^\varepsilon \overline{f}) = (\overline{a_1} + \varepsilon\overline{a_0}) + \overline{a_0}e^{ix}.$$

Ceci montre que $H_{u_0^\varepsilon}$ est de rang deux.

Ensuite, par définition,

$$\widetilde{H}_{u_0^\varepsilon}(f) = H_{u_0^\varepsilon}(Sf) = H_{u_0^\varepsilon}(e^{ix}f) = \Pi(u_0^\varepsilon \overline{e^{ix}f}) = \Pi(\overline{f} + \varepsilon e^{-ix}\overline{f}) = \overline{a_0},$$

ce qui montre que $\widetilde{H}_{u_0^\varepsilon}$ est de rang un. Or,

$$\mathcal{U} = \big\{u : \mathrm{rang}(\widetilde{H}_u) = 1,\, \mathrm{rang}(H_u) = 2\big\} = \big\{u : \underline{u}(z) = \frac{az+b}{1-pz}, \quad |p| < 1, a \neq 0.\big\}.$$

On cherche alors la solution u^ε sous la forme,

$$u^\varepsilon(t,z) = \frac{a^\varepsilon(t)z + b^\varepsilon(t)}{1 - p^\varepsilon(t)z}, \quad |p^\varepsilon(t)| < 1,\ a^\varepsilon(t) \neq 0.$$

On trouve,

$$\begin{aligned} &a^\varepsilon(t) = e^{-it(1+\varepsilon^2)}, \quad b^\varepsilon(t) = e^{-it(1+\frac{\varepsilon^2}{2})}\Big[\varepsilon\cos(\omega^\varepsilon t) - \frac{2+\varepsilon^2}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}\sin(\omega^\varepsilon t)\Big], \\ &\omega^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}, \quad p^\varepsilon(t) = \frac{-2i}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}\sin(\omega^\varepsilon t)e^{-it\frac{\varepsilon^2}{2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Remarque 4.9. 1. Pour $t^\varepsilon = \frac{\pi}{2\omega^\varepsilon} \sim \frac{\pi}{2\varepsilon}$ on a, $|1 - |p^\varepsilon(t^\varepsilon)|^2| \sim \frac{\varepsilon^2}{4}$ de sorte que l'on trouve,

$$\|u^\varepsilon(t^\varepsilon)\|_{H^s} \sim \frac{1}{\varepsilon^{2s-1}}.$$

ce qui montre que les normes H^s pour $s > \frac{1}{2}$ ne sont pas controlées par les lois de conservation de (4.1) puisque, $\|u_0^\varepsilon\|_{H^s} = \sqrt{c_s + \varepsilon^2}, c_s \neq 0$.

2. La trajectoire de p^ε pour ε petit est décrite dans la figure 1. ci-dessous. Elle forme "la marguerite". On a $p_\varepsilon(0) = 0$ puis p_ε voyage sur la marguerite. La distance de la pointe des pétales au bord du disque de rayon 1 est de l'ordre de ε^2.

Revenons à la preuve de la Proposition 4.8. L'équation (4.1) possède les invariances d'échelle suivantes. Si $u = u(t, z)$ est solution de (4.1) alors pour tout $R > 0$ et tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$u_{R,N}(t, z) = Ru(R^2 t, z^N)$$

est aussi une solution de (4.1).

Posons,

$$T_\varepsilon = \frac{\pi}{2\omega^\varepsilon} \sim \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

D'après (4.12) on a,

$$|b^\varepsilon(T^\varepsilon)| = \frac{2+\varepsilon^2}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} \to 1, \quad \varepsilon \to 0.$$

Choisissons une suite (R^ε) de réels positifs puis une suite $(N^\varepsilon) \subset \mathbf{N}^*$ telles que lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\varepsilon\, R^\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon\, (R^\varepsilon)^2 \to +\infty, \qquad (N^\varepsilon)^{-\delta} R^\varepsilon \to 0.$$

Alors évidemment $(R^\varepsilon) \to +\infty, (N^\varepsilon) \to +\infty$.

Posons,

$$v^\varepsilon(t, z) = R^\varepsilon u^\varepsilon\big((R^\varepsilon)^2 t, z^{N^\varepsilon}\big), \quad t^\varepsilon = \frac{T^\varepsilon}{(R^\varepsilon)^2}.$$

Alors, v^ε est solution de (4.1) et l'on a,

$$\begin{aligned}
&\|v^\varepsilon(0)\|_{H^{-\delta}} = (N^\varepsilon)^{-2\delta}(R^\varepsilon)^2 + (\varepsilon\, R^\varepsilon)^2 \to 0,\\
&|\langle v^\varepsilon(t^\varepsilon)\,|\,\mathbf{1}\rangle| = R^\varepsilon |\langle u^\varepsilon(T^\varepsilon)\,|\,\mathbf{1}\rangle| = R^\varepsilon |b^\varepsilon(T^\varepsilon)| \to +\infty,
\end{aligned}$$

tandis que,

$$t^\varepsilon \sim \frac{\pi}{2\varepsilon\,(R^\varepsilon)^2} \to 0.$$

□